Formelsammlung Mathematik

Fachoberschule Jahrgangsstufe 12

Hochtaunusschule Oberursel

Philipp Maurer in Zusammenarbeit mit StR A. Krämer

Stand: 20. Februar 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Potenzgesetze

$x^0 = 1$ $\qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

$x^{\frac{1}{b}} = \sqrt[b]{x}$ $\qquad x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ $\qquad x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$

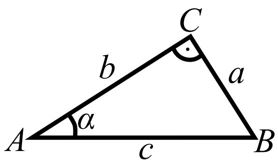
$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$ $\qquad (x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$

$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$

1.2 Binomische Formeln

1. binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. binomische Formel: $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

2 Berechnung an Dreiecken



2.1 Trigonometrie

Sinus $\sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{a}{c}$

Kosinus $\cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{b}{c}$

Tangens $\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{b}$

2.2 Satz des Pythagoras

$a^2 + b^2 = c^2$

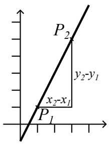
3 Ganzrationale Funktionen

3.1 Geraden

3.1.1 Normalform

$$\boxed{f(x) = m \cdot x + b}$$

3.1.2 Steigungsdreieck und Steigungswinkel



Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ **Steigungswinkel:** $\alpha = \arctan(m)$

3.2 Funktionen zweiten Grades

3.2.1 Scheitelpunktform

$$\boxed{f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s}$$

$a \Rightarrow$ Streckung/Stauchung
$x_s \Rightarrow$ x-Wert des Scheitelpunktes
$y_s \Rightarrow$ y-Wert des Scheitelpunktes

3.2.2 Quadratische Ergänzung zur Bestimmung der Scheitelpunktform

Gegebene quadratische Funktion	$y = ax^2 + bx + c$
Ausklammern des Leitkoeffizienten	$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$
Quadratische Ergänzung	$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$
Bildung des Quadrats	$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$
Ausmultiplizieren	$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2}{4a^2} + c$
Scheitelpunktform der Funktion	$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$
Ablesen des Scheitelpunkts	$S\left(-\frac{b}{2a} \middle| c - \frac{b^2}{4a}\right)$

3.3 pq-Formel

3.3.1 Formel

$$0 = x^2 + p \cdot x + q \quad \boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

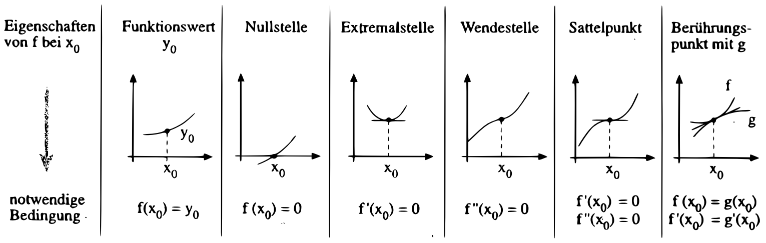
3.3.2 Vorgehensweise

Funktion zweiten Grades	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Ersten Faktor durch a teilen	$f(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$
$f(x) = 0$ setzen	$0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$
In pq-Formel einsetzen	$x_{1/2} = -\frac{\frac{b}{a}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 - \frac{c}{a}}$

3.4 Substitution: Lösen biquadratischer Gleichungen

Funktion vierten Gerades	$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$
z bestimmen	$z = x^2$
in $f(x)$ einsetzen	$f(z) = a \cdot z^2 + b \cdot z + c$
Nullsetzen und mit pq-Formel weiter rechnen	$f(z) = 0$
Wurzel der Ergebnisse der pq-Formel ziehen	$x_{1/2} = \pm\sqrt{z_1} \quad x_{3/4} = \pm\sqrt{z_2}$

3.5 Kurvendiskussion



3.5.1 Streben gegen $\pm\infty$

Betrachtet wird hierbei nur der höchste Exponent und sein Vorfaktor $\Rightarrow\ a \cdot x^n$

	a positiv	a negativ
n gerade	für x gegen $+\infty \rightarrow$ f(x) geht gegen $+\infty$ für x gegen $-\infty \rightarrow$ f(x) geht gegen $+\infty$	für x gegen $+\infty \rightarrow$ f(x) geht gegen $-\infty$ für x gegen $-\infty \rightarrow$ f(x) geht gegen $-\infty$
n ungerade	für x gegen $+\infty \rightarrow$ f(x) geht gegen $+\infty$ für x gegen $-\infty \rightarrow$ f(x) geht gegen $-\infty$	für x gegen $+\infty \rightarrow$ f(x) geht gegen $-\infty$ für x gegen $-\infty \rightarrow$ f(x) geht gegen $+\infty$

3.5.2 Symmetrien

Achsensymmetrie: Alle Exponenten gerade f(x) = f(-x)
Punktsymmetrie: Alle Exponenten ungerade f(x) = -f(-x)

3.5.3 Ableitungsregeln (Potenzregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel)

Potenzregel $f(x) = a \cdot x^n$ $\boxed{f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}}$

Produktregel $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ $\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$

Quotientenregel $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $\boxed{f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}}$

Kettenregel $f(x) = u(v(x))$ $\boxed{f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)}$

3.5.4 Extremwerte

- Bilde $f'(x)$
- Nullstelle(n) von $f'(x)$ suchen $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$ $\Rightarrow$ $x_0 = ...$
  notwendige Bedingung: ($\Rightarrow$ *Steigung* $= 0$)
- Nullstelle(n) von $f'(x)$ in $f(x)$ einsetzen, um die y-Werte der Extremwerte zu bestimmen ($f(x_0) = ...$)
- **hinreichende Bedingung:** $f''(x) \neq 0$
  Ermitteln ob x_0 ein Hoch- oder Tiefpunkt ist, indem x_0 in $f''(x)$ eingesetzt wird:
  1. $f''(x) > 0$ $\Rightarrow$ Tiefpunkt (lokales Minimum)
  2. $f''(x) < 0$ $\Rightarrow$ Hochpunkt (lokales Maximum)
  3. $f''(x) = 0$ $\Rightarrow$ Sattelpunkt

3.5.5 Wendepunkte

Vorgehen wie bei Extremwerten. Bedingungen sind allerdings etwas abgeändert:

notwendige Bedingung:	$f''(x) = 0$
hinreichende Bedingung:	$f'''(x) \neq 0$

1. Ableitungen bilden (bis $f'''(x)$)
2. Nullstellen suchen $\Rightarrow$ **notwendige Bedingung**
   Wendepunkt $f''(x) = 0$ $\Rightarrow$ $x_{1/2/3/...}$
3. Einsetzen der Nullstellen in $f(x)$ $\Rightarrow$ $y_{1/2/3/...}$
4. **hinreichende Bedingung** $x_{1/2/3/...}$ einsetzen
5. Einzeichnen
6. auf **Plausibilität** prüfen

3.6 Tangenten

Definition: Gerade die im *Berührpunkt* die identische Steigung wie die Funktion hat

Normalform einer Geraden	$y = m \cdot x + b$
1. Ableitung bilden und x einsetzen	$m = f'(x)$
Punkt (durch den die Tangente geht) in Normalform einsetzen	$y_p = m \cdot x_p + b$
	$b = y_p - m \cdot x_p$

3.7 Normale

Definition: Gerade, die im *Schnittpunkt* die Funktion im Rechten Winkel (90°) schneidet
Erst die Tangente bestimmen (siehe *Tangente*) und dann mit $m_2 = \frac{-1}{m_1}$ die Normale bestimmen.

3.8 Steigungswinkel

$m = f'(x)$ $\rightarrow$ für x den Punkt einsetzen $m = \tan\alpha$ $\alpha = \arctan m$

3.9 Schnittwinkel

m bestimmen wie beim Steigungswinkel
$\alpha = \arctan m_1 - \arctan m_2$

3.10 Abstand zwischen zwei Punkten

$a^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$
$a^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

4 Rekonstruktion

Funktionsansatz vom Grad n aufstellen	$f(x) = a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + ..$
Ableitungen ermitteln	*f'(x) und f"(x)*
Bedingung formulieren	*i.d.R. n+1 Bedingungen*
	f(x) für Funktionswerte
	f'(x) für Steigung und Extrema
	f"(x) für Krümmung und Wendepunkte
Werte einsetzen	*Gleichungssystem aufstellen*
Gleichungssystem lösen	*z.B. Einsetzverfahren oder Gauss-Jordan*

5 Extremwertaufgaben

HB Hauptbedingung aufstellen	*Funktion für zu optimierende Größe formulieren*
NB Nebenbedingung aufstellen	*Randbedingung / Einschränkung*
Zielfunktion ermitteln	*NB in HB einsetzen, so dass diese nur von einer Variable abhängt*
Extremwert bestimmen	$f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$
alle gesuchten Größen ermitteln	*einsetzen in HB / NB*
Kontrolle des Ergebnisses	

6 Integralrechnung

6.1 Integrieren

$f(x) = a \cdot x^n$ $\boxed{F(x) = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}}$

6.2 Vorgehensweise

$\int_a^b f(x)dx \;=\; [F(x)]_a^b \;=\; F(b) - F(a)$

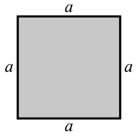
6.3 Fläche zwischen zwei Funktionen

$\int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx \;=\; \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$
Hinweis: Integration der Teilfläche durch schrittweise Integration über die Schnittpunkte von f_1 und f_2

7 Geometrische Figuren

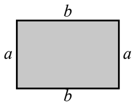
7.1 Inhalt und Umfang ebener Figuren

Quadrat



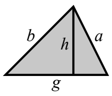
Inhalt: $A = a^2$
Umfang: $U = 4a$

Rechteck



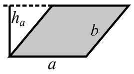
Inhalt: $A = a \cdot b$
Umfang: $U = 2a + 2b$

Dreieck



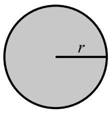
Inhalt: $A = \frac{1}{2} g \cdot h$
Umfang: $U = a + b + c$

Parallelogramm



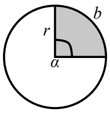
Inhalt: $A = a \cdot h_a$
Umfang: $U = 2a + 2b$

Kreis



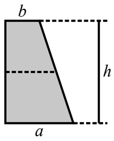
Inhalt: $A = \pi \cdot r^2$
Umfang: $U = 2\pi \cdot r$

Kreisausschnitt



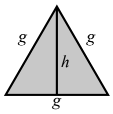
Inhalt: $A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$
Bogen: $b = 2\pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360°}$

Trapez



Inhalt: $A = \frac{a+b}{2} \cdot h$

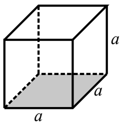
gleichseitiges Dreieck



Höhe: $h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \sqrt{3}$

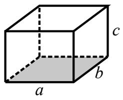
7.2 Volumen und Oberfläche von Körpern

Würfel



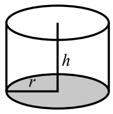
Volumen: $V = a^3$
Oberfläche: $O = 6a^2$

Quader



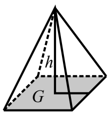
Volumen: $V = a \cdot b \cdot c$
Oberfläche: $O = 2 \cdot (ab + ac + bc)$

Zylinder



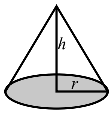
Volumen: $V = \pi r^2 \cdot h$
Oberfläche: $O = 2\pi r(r + h)$

Pyramide



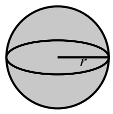
Volumen: $V = \frac{1}{3} G \cdot h$
Oberfläche: Summe der Inhalte der Grundfläche und der Seitenfläche

Kegel



Volumen: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
Oberfläche: $O = \pi r(r + s)$

Kugel



Volumen: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$
Oberfläche: $O = 4\pi \cdot r^2$